САБАҚ № 13

Бұл сабақта сыртқы тұрпаттарға амалдар қолдануды, мәндерін есептеуді, айнымалыны алмастыруды, геометриялық мағынасын анықтауды қарастырамыз.

Жаттығу 1*.* $\omega = x^2 dx^1$ *дифференциалдық тұрпаттың* $\xi = (1;2;3) \in T\mathbb{R}^3_{(3;2;1)}$ *векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.*

Шешуі. M көпбейненің $x = (3;2;1)$ нүктесіндегі жанама жазықтығын TM_x арқылы, $\vec{\xi}$ жанама векторының проекциясының ұзындығын $dx^1(\vec{\xi})$ деп белгілегенбіз. Ендеше,

$$\omega(\vec{\xi}) = x^2 dx^1(\vec{\xi}) = 2 * 1 = 2$$

Жаттығу 2*.* $\omega = x^2 dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4$ *дифференциалдық тұрпаттың* $\xi, \eta \in T\mathbb{R}^4_{(1;0;0;0)}$ *векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.*

Шешуі. $dx^1 \wedge dx^3(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ - екі жанама вектордан $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_4)$, $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_4)$ құралған параллелограммның Ox^1x^3 жазықтыққа проекциясының ауданы

$$dx^1 \wedge dx^3(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

анықтауыштың мәніне тең. Осы сияқты,

$$dx^2 \wedge dx^4(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_4 \\ \eta_2 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

Сондықтан, $\omega(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = x^2 dx^1 \wedge dx^3(\vec{\xi}, \vec{\eta}) + dx^2 \wedge dx^4(\vec{\xi}, \vec{\eta}) =$

$$= 0 * \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_4 \\ \eta_2 & \eta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_4 \\ \eta_2 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

Жаттығу 3*.* $\omega = x^2 dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4$ *дифференциалдық тұрпаттың* $\vec{\xi} = (0;-1;2;-3) \in T\mathbb{R}^4_{(1;0;0;0)}$, $\vec{\eta} =$

$(2;-2;0;1) \in T\mathbb{R}^4_{(1;0;0;0)}$ *жанама векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.*

Шешуі. Алдыңғы жаттығудың жауабын пайдалансақ:

$$\omega(\vec{\xi},\vec{\eta}) = x^2 dx^1 \wedge dx^3(\vec{\xi},\vec{\eta}) + dx^2 \wedge dx^4(\vec{\xi},\vec{\eta}) = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

Жаттығу 4. $5dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + 6dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - 8dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2$ *түрде берілген тұрпатты ықшамдаңыз.*

Шешуі. Тұрпаттың $dx^i \wedge dx^i = 0,\ dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ қасиетіне сүйенсек:

$$5dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + 6dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - 8dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 =$$

$$= -5dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + 0 + 8dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 =$$

$$= -5dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - 8dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -13dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

Жаттығу 5. $\alpha = x^1 dx^1 + x^3 dx^2 - x^2 dx^3,\ \ \beta = x^2 dx^1 + x^3 dx^2 + x^1 dx^3$ *тұрпаттар берілген.* $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ *тұрпаттардың сыртқы көбейтіндісін табыңыз.*

Шешуі. $\alpha(x) \wedge \beta(x) = (x^1 dx^1 + x^3 dx^2 - x^2 dx^3) \wedge$

$$\wedge (x^2 dx^1 + x^3 dx^2 + x^1 dx^3) =$$

$$= x^1 x^3 dx^1 \wedge dx^2 + (x^1)^2 dx^1 \wedge dx^3 + x^3 x^2 dx^2 \wedge dx^1 + x^3 x^1 dx^2 \wedge dx^3 -$$

$$-(x^2)^2 dx^3 \wedge dx^1 - x^2 x^3 dx^3 \wedge dx^2 =$$

$$= (x^1 - x^2) x^3 dx^1 \wedge dx^2 + ((x^1)^2 + (x^2)^2) dx^1 \wedge dx^3 + (x^1 + x^2) x^3 dx^2 \wedge dx^3$$

Жаттығу 6*.* $\alpha = x^1dx^1 + x^3dx^2 - x^2dx^3$, $\beta = x^2dx^1 + x^3dx^2 + x^1dx^3$ *тұрпаттар берілген.* $\alpha(x)\wedge\beta(x)$ *тұрпаттардың сыртқы көбейтіндісінің* $\vec{\xi} = (0; -1; 2;) \in T\mathbb{R}^3_{(1;2;-3)}$, $\vec{\eta} = (2; -2; 1) \in T\mathbb{R}^3_{(1;2;-3)}$ *векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.*

Шешуі. Ол үшін алдыңғы жаттығудың жауабын пайдаланайық. Берілу бойынша $x = (1; 2; -3)$ және

$$dx^i\wedge dx^j(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_j \\ \eta_i & \eta_j \end{vmatrix}$$

болғандықтан

$$\alpha(x)\wedge\beta(x) = (x^1 - x^2)x^3dx^1\wedge dx^2 + ((x^1)^2 + (x^2)^2)dx^1\wedge dx^3 +$$

$$+(x^1 + x^2)x^3dx^2\wedge dx^3 =$$

$$= -(1-2)\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (1+4)\cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (1+2)\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 - 20 - 27 = -41$$

Тапсырмалар

1. $\omega = x^3dx^1 + x^1dx^2$ дифференциалдық тұрпаттың $\xi = (-1; 4; 3) \in T\mathbb{R}^3_{(3;0;1)}$ векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.
2. $\omega = dx^1\wedge dx^3 + x^2dx^3\wedge dx^4$ дифференциалдық тұрпаттың $\xi, \eta \in T\mathbb{R}^4_{(1;0;-1;0)}$ векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.
3. $\omega = dx^1\wedge dx^3 + x^2dx^3\wedge dx^4$ дифференциалдық тұрпаттың $\xi = (-1; 4; 3; 2)$, $\eta = (-2; 1; 3; 0) \in T\mathbb{R}^4_{(1;0;-1;0)}$ векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.
4. $\omega = df$, $f = x^1 + 2x^2 + \cdots + nx^n$ дифференциалдық тұрпаттың $\xi = (1; -1; \dots; (-1)^{n-1}) \in T\mathbb{R}^n_{(1;1;\dots;1)}$ векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.

5. $df \wedge dg$ дифференциалдық тұрпатты $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$ тұрпаттардың тіркесі түрінде жазыңыз, мұнда $f = ln(1 + |x|^2)$, $g = sin|x|$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq 3$, $x = (x^1; x^2; x^3)$.
6. $df \wedge dg$ дифференциалдық тұрпатты $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$ тұрпаттардың тіркесі түрінде жазыңыз, мұнда $f = arctg\frac{x^1x^2}{x^3x^4}$, $g = x^3x^1 - x^2x^4$, $1 \leq i_1 < i_2 \leq 4$, $x = (x^1; x^2; x^3; x^4)$.
7. $\omega_1 = 3x^1 \cdot x^2dx^1 - 4x^2 \cdot x^3dx^2 + 7(x^1)^2dx^3$ бірінші ретті сыртқы дифференциалдық тұрпаттың $d\omega$ дифференциалын табыңыз.
8. $\alpha = x^2dx^1 + 2x^1dx^2 - 3dx^3$, $\beta = x^3dx^1 + x^2dx^2 + x^1dx^3$ тұрпаттар берілген. $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ тұрпаттардың сыртқы көбейтіндісін табыңыз.
9. $\alpha = x^2dx^1 + 2x^1dx^2 - 3dx^3$, $\beta = x^3dx^1 + x^2dx^2 + x^1dx^3$ тұрпаттар берілген. $\alpha(x) \wedge \beta(x)$ тұрпаттардың сыртқы көбейтіндісінің $\vec{\xi} = (0; -1; 2;) \in T\mathbb{R}^3_{(1;2;-3)}$, $\vec{\eta} = (2; -2; 1) \in T\mathbb{R}^3_{(1;2;-3)}$ векторлардың жиынтығындағы мәнін табыңыз.
10. $\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ берілген. $d\omega = 0$ дәлелдеңіз.